問題１１（物理学）

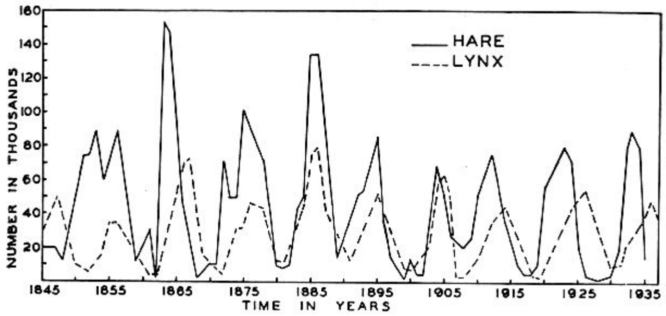


Fig. 1.21. Changes in the abundance of the lynx and the snowshoe hare, as indicated by the number of pelts received by the Hudson Bay Company (After D. A. McLulich: *Fluctuations in the Numbers of Varying Hare*. Univ. of Toronto Press, Toronto 1937)

上のグラフは、ハドソン湾にある毛皮会社に入荷した毛皮の数の約１００年間の記録である。入荷した数が動物の生息数と比例すると考えると、このグラフは、その地域でのウサギとヤマネコの生息数が約１０年周期で振動していることを表している。

ヤマネコの主な食料がウサギであるとすると、動物の数が外部からの撹乱なしで振動することを、以下の問いにしたがって説明しなさい。（ウサギのえさになる草の量は、常に十分であると仮定する。）

問１　　ウサギ、ヤマネコのある時点での生息数を U(t), V(t) とする。動物の生息数の単位時間当たりの変化量は　（出生率ｘ生息数－死亡率ｘ生息数）

で表すことができる。ウサギの出生率は一定、死亡率はヤマネコの数に比例し、ヤマネコの出生率はウサギの生息数に比例し、死亡率は一定であるとする。生息数の変化を表す微分方程式として、正しいものを選べ。（p, q, r, s は正の定数）

（１）
$$\frac{dU}{dt} = pU(t) - qU(t)V(t)$$
$$\frac{dV}{dt} = rU(t)V(t) - sV(t)$$

（２）
$$\frac{dU}{dt} = pU(t) - qV(t)$$
$$\frac{dV}{dt} = rU(t) - sV(t)$$

（３）
$$\frac{dU}{dt} = pU(t) - \frac{qU(t)}{V(t)}$$
$$\frac{dV}{dt} = \frac{rU(t)}{V(t)} - sV(t)$$

（４）
$$\frac{dU}{dt} = \frac{pU(t)}{qU(t)V(t)}$$
$$\frac{dV}{dt} = \frac{rU(t)V(t)}{sV(t)}$$

問２　　方程式から、ウサギ、ヤマネコの生息数の変動が＋、０、－になる条件を求めよ。

問３　　問２の条件を U, V の２次元グラフ上に図示し、２次元平面の各領域でのウサギ、ヤマネコの生息数の増減を調べて、グラフ上に書き入れ、生息数が振動する可能性が在ることを説明せよ。

問４　　ウサギの数を増やそうとして、ヤマネコの数を減らしてしまうと、ウサギの生息数変動が大きくなることを、問３の図から説明せよ。

問題１２（物理学）

ある分子が下記のような3つの微視的状態をとり得る系の統計力学を考える。

微視的状態（名称）	エネルギー	状態の数（縮重度）
3	$2\varepsilon_0$	g
2	ε_0	1
1	0	1

問1.　この系の分配関数 Q を、エネルギーε_0、縮重度 g、温度 T の関数として表しなさい。

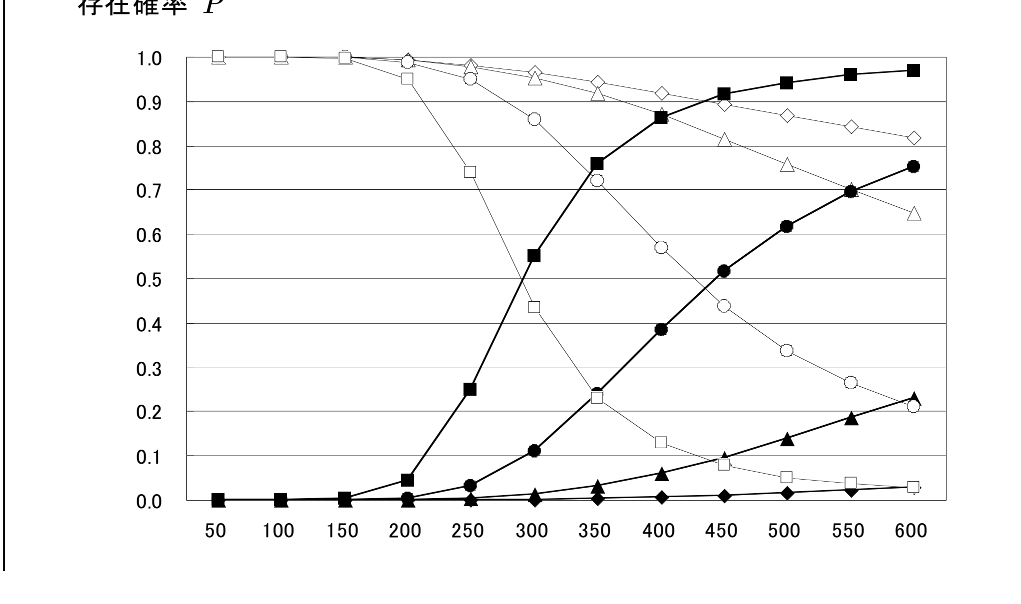
問2.　この系の平均エネルギー $<\varepsilon>$ をエネルギーε_0、縮重度 g、温度 T の関数として表しなさい。

問3.　ε_0 はモルあたり 2 kcal （$N_A\,\varepsilon_0$ = 2 kcal mol^{-1}, N_A = アボガドロ数）かつ g = 1000 であるとき、状態 1 にある確率 P_1 と状態 3 にある確率 P_3 が均しくなる温度 T_0 を求めなさい。ただし、ガス定数 $R = N_A\,k$ = 2 cal K^{-1} mol^{-1}（ただし k はボルツマン定数）とし、ln 10 = 2.3 を使いなさい。

問4.　下のグラフは $N_A\varepsilon_0$ = 2 kcal mol^{-1} 、g = 1, 10, 100, 1000 のそれぞれについて、P_1 と P_3 の温度 T 依存を示したものである。それぞれの曲線が対応する g の値と P_1、P_3 の区別を、表中の（1）、（2）、（3）、（4）の欄について答えなさい。

記号	g の値	P_1, P_3 の区別	記号	g の値	P_1, P_3 の区別
◆			◇		
▲			△	（3）	（4）
●			○		
■	（1）	（2）	□		

問5.　結局 g が大きくなると系はどのような特徴を持つか簡単に考えを述べなさい。



問題１３（物理学）

力の作用線がつねに空間内の一定点を通るような力を中心力といい、その定点を力の中心点という。中心力場における質点の運動について以下の問いに答えよ。

問１　一つの中心力のみを受けて質点が運動する場合、力の中心点のまわりの角運動量が保存され、質点の軌道がつねに力の中心点を含む同一平面内にあることを示せ。

問２　問１からわかるように、中心力を受ける質点の運動は一平面内に限られるので、中心力の問題を扱うには直交座標よりも、平面極座標を用いた方が便利である。質量mの質点に中心力Fがはたらくときの運動方程式は、図 1 のように力の中心点を原点にとった平面極座標表示で

$$\begin{cases} F = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \\ 0 = \dfrac{m}{r}\dfrac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) \end{cases}$$

と書けることを示せ。ただし上つきドットは時間tに関する微分を表し、第１式は動径方向、第２式は方位角方向の運動方程式である。

問３　代表的な中心力である万有引力による散乱問題を解いてみよう。静止している質点 A に質点 B が無限遠方から初速度v_0で飛んできて近づき、質点 A から万有引力を受けながら再び遠く離れていく場合を考える。質点 A の質量Mは質点 B の質量mよりもはるかに大きく、質点 A は質点 B の運動の全過程を通じて静止していると考えてよい。図 2 のように質点 B の無限遠からの入射方向（初速度の方向）を延長した直線と質点 A の距離（衝突径数）をbとし、$b > 0$とする。このとき、質点 B の軌道は双曲線軌道になる。

（１）　質点 B が質点 A に最も近づいたときの質点 A と質点 B の間の距離を求め、さらにそのときの質点 B の速度の大きさを求めよ。ただし万有引力定数をGとする。

（２）　図 2 のように質点 B の双曲線軌道の二つの漸近線がなす角（散乱角）をϕとすると、

$$\tan\frac{\phi}{2} = \frac{GM}{b{v_0}^2}$$

となることを示せ。

ヒント：質点 A を原点とする平面極座標(r,θ)で運動方程式をたてて解くことにより質点 B の軌道$r = r(\theta)$を求めるにあたり、$u = 1/r$という変数変換が便利である。

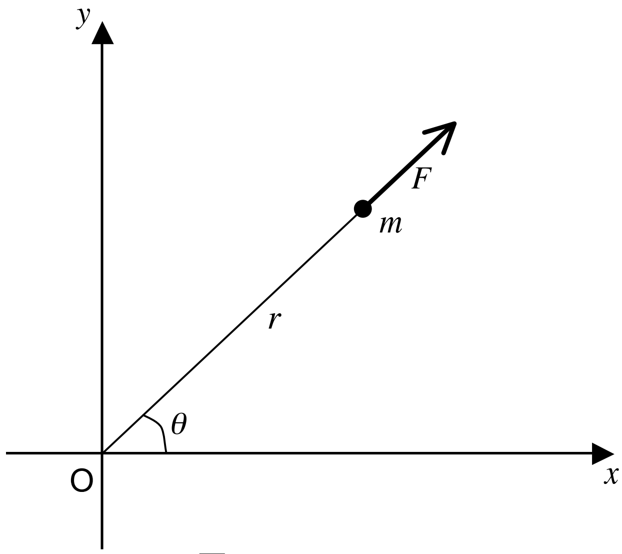


図１

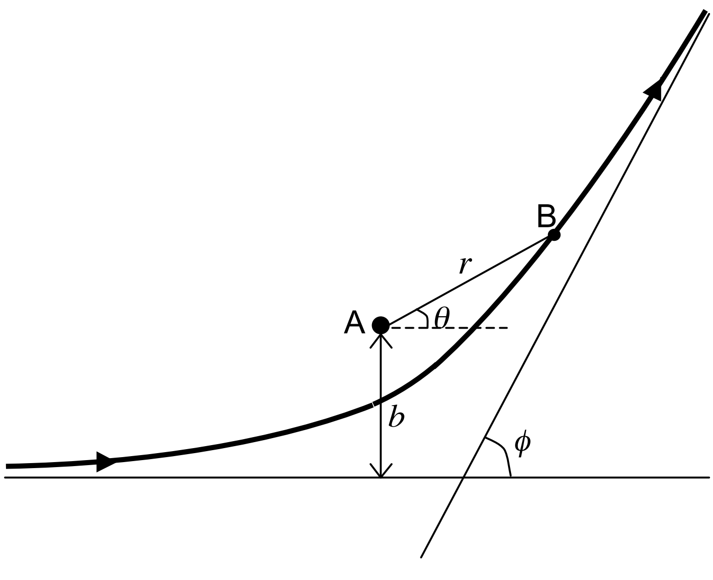


図２

問題１４（物理学）

静電場について以下の問いに答えよ。ただし真空の誘電率をε_0とする。

問１． 位置$\mathbf{r}(x,y,z)$における静電ポテンシャル$\phi(\mathbf{r})$と電荷密度$\rho(\mathbf{r})$はポアッソン方程式

$$\Delta\phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0}$$

で関係づけられる。ここで$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$はラプラシアンである。ポアッソン方程式に基づいて、静電場がもつ以下の３つの性質を証明せよ。

（１） 内部に電荷を含まない領域で、静電ポテンシャルは極大も極小も持たない。

（２） 内部に電荷を含まない領域の境界で静電ポテンシャルが0であるならば、領域内のいたるところで静電ポテンシャルは0である。

（３） ある領域で境界の静電ポテンシャルと電荷分布を与えると、内部の静電ポテンシャルは一意的に定まる。

問２. 図のように接地された無限導体平面の一方に引いた垂線lの上に、平面から距離a,bの位置にそれぞれ点電荷$+q$と$-q$が置かれている。ただし$a>b$とする。問１からわかるように、このような条件を満たす静電場は一意的に定まる。

（１） 導体面上に誘導される電荷密度（lと導体平面の交点からの距離の関数となる）を求めよ。

（２） 導体の表面全体に誘導される電荷の総量を求めよ。

（３） 点電荷$+q$を、導体表面からの距離がaの位置からlに沿って図の右の方に無限遠まで運ぶのに要する仕事を求めよ。