

## 問題 1 1 (物理学)

動物の行動の進化を、ゲーム理論を使って考える。2 頭の同種の動物が資源（餌、巣の材料など）を巡って争う場合、相手に攻撃を仕掛けるタカ戦略、相手を威嚇しつつ待機し、相手が攻撃してくると逃げ出すハト戦略、の 2 通りの戦略をとりうるものとする。タカ-ハトのときは、ハトが常に逃げるためタカが資源を獲得する。ハト-ハトのときは確率  $1/2$  で資源を獲得できると仮定する。タカ-タカのときはけんかになり、確率  $1/2$  でどちらかが怪我をして逃走し、残った方が資源を獲得する。資源の価値を 4、怪我によるダメージを  $-6$  として計算すると、下のような利得行列が得られる。

（ゲーム理論では、子孫を残すために有利、あるいは不利な状況をポイント（利得）で表現しそれが集団の平均より高ければ、その子孫が集団内で比率を増していくと考える。）

	タカ（相手）	ハト（相手）
タカ（自分）	-1	4
ハト（自分）	0	2

- (問 1) 全ての個体が、常にタカ戦略を取っている集団に対して、少数の常にハト戦略を取る個体群が侵入した場合に集団内の比率がどのようになるかを、それぞれの個体群の平均利得を求めることで推定せよ。
- (問 2) 常にタカ戦略を取る個体の割合を  $p$  と、常にハト戦略を取る個体の割合を  $1-p$  とするとき、両者の利得が同じになる  $p$  の値を求めよ。
- (問 3) 一匹の個体が、ある確率でハト、タカ戦略を使い分けるとき、それを混合戦略と言う。問 2 でもとめた  $p$  に対して、混合戦略  $p$  を「確率  $p$  でタカ戦略、確率  $1-p$  でハト戦略をとる」とすると、混合戦略  $p$  を取る集団に対して、常にタカ戦略、あるいは常にハト戦略をとる集団は侵入できないことを証明せよ。
- (問 4) 問 3 の戦略が ESS（進化的に安定な戦略、つまり他のどのような戦略をとる個体群の進入に対しても安定である）であることを証明しなさい。

ただし、以下の定理を使ってよい。

「 $E(i, j)$  を、戦略  $i$  が戦略  $j$  と対戦した場合の  $i$  の利得であるとする、戦略  $X$  が ESS であるためには  $X$  以外の、任意の戦略  $Y$  に対して、

$$E(X, X) \geq E(Y, X)$$

あるいは

$$E(X, X) = E(Y, X) \quad \text{かつ} \quad E(X, Y) > E(Y, Y)$$

を満たせばよい。」

## 問題 1 2 (物理学)

質量  $m$  の質点が重さの無視できる長さ  $l$  の棒でぶら下がっている (図 1)。水平方向に  $X$  軸、垂直方向に  $Z$  軸をとるものとする。 $Z$  軸と棒の角度を  $\theta$  とする。また速度に比例した抵抗 (比例定数を  $\eta$  とする) が働くとする。

問 1)

- (1) 質点の運動方程式を  $\theta$  を変数としてたてよ。
- (2)  $\theta$  は小さいと仮定する。運動方程式の一般解を求めよ。

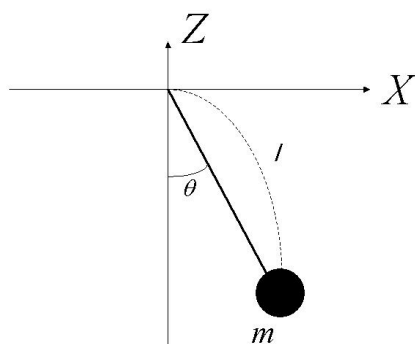


図 1

次に支点の位置を原点に対して  $X$  軸方向に  $A\sin(\omega t)$  ( $A, \omega$  は定数,  $t$  は時刻) で振動させるものとする (図 2)。

問 2)

- (1) 質点の運動方程式を  $\theta$  を変数としてたてよ。
- (2)  $\theta$  は小さいと仮定する。運動方程式の定常状態での解を求めよ。

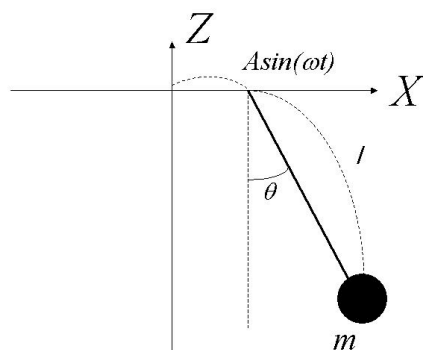
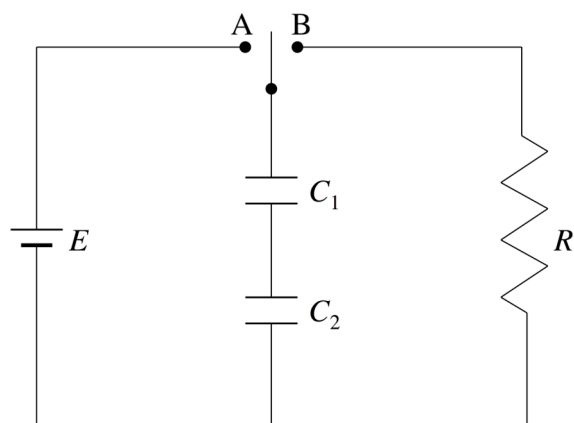


図 2

### 問題 1 3 (物理学)

図のように、電圧  $E$  の直流電源、容量  $C_1$ 、 $C_2$  のコンデンサー、抵抗  $R$  の抵抗器、およびスイッチで回路を作る。初め、スイッチは A、B のどちらにも接続されておらず、回路に電流が流れておらず、どのコンデンサーにも電荷がないものとする。



- 問 1) まず、スイッチを A に入れると、コンデンサーが充電され始め、十分に長い時間がたつと回路に流れる電流は 0 になる。このときまでにコンデンサー  $C_1$ 、 $C_2$  にたまった静電エネルギーの和を求めよ。
- 問 2) 次に、スイッチを A から B に切りかえる。スイッチを切りかえた瞬間を時刻  $t=0$  とし、このあと時刻  $t=T (> 0)$  までに抵抗  $R$  で発生するジュール熱  $J(T)$  を求め、 $\lim_{T \rightarrow \infty} J(T)$  が問 1 で求めた静電エネルギーの和に等しいことを示せ。
- 問 3) 一般に、抵抗に電流が流れると熱 (ジュール熱) が発生する。これはなぜか。

## 問題 1 4 (物理学)

光学顕微鏡の結像原理に関する次の文章を読み、以下の問いに答えよ。

図1のように試料面に直角に一樣な強さの平面波（平行光線）を照射すると、試料面を通過し直進する平行光線（直進光）は顕微鏡の対物レンズの後方焦点  $S$  にいったん収束した後、再び発散して像面を均一に照らす。

いま、スライドガラス上に黒インクで小さい点列を等間隔に置き、このスライドガラスを図1の試料面に挿入すると、試料面では直進光の一部は黒インクによって吸収される。これは、試料の後方での光は、試料の前方と同一の振幅をもつ直進光と、それと位相が  $180$  度ずれた回折光の2つの光線の重ねあわせになっていると考えることができる。像面では直進光と試料による回折光の干渉像が観測されるが、このときの相互の位相関係は、試料面での位相関係が保たれる。

上述の黒インク点列を試料面に置き、顕微鏡の対物レンズ後方焦点面に、図2Aのように中央に小さな穴をあけた薄い金属の円盤を置いたところ、像面はほぼ一様に明るく、点列はほとんど見えなかった。一方、図2Aの円盤のかわりに、図2Bのように中央に黒点を置いた透明なガラス板を対物レンズ後方焦点面に挿入すると、像面では暗い背景に点列だけが明るく浮き上がって見えた。(1)

次に、試料面に無色透明な細胞を置く。細胞は周囲に比して屈折率がわずかに高く、直進光を  $\varphi = \sin\omega t$  ( $\omega$ は角振動数,  $t$ は時間) とすると、細胞を通過した光には位相遅れ  $\Delta$  が生じる。 $\Delta (> 0)$ は極めて小さく、細胞を通過した光は

$$\begin{aligned} \phi &= \sin(\omega t - \Delta) \\ &\approx \sin\omega t + \Delta \cdot \sin(\omega t - \pi/2) \end{aligned}$$

と近似できる。この右辺第1項は直進光であり、右辺第2項は細胞による回折光に相当し、回折光は直進光に比べて位相が  $\pi/2$  遅れた振幅の小さな光であると考えられる。この場合、直進光と回折光の干渉によってできる光は直進光と振幅が等しいため、像面には明暗のコントラストが生じず（像面はほぼ一様に明るくなり）、図1のような通常の明視野顕微鏡では無色透明な細胞を見ることが出来ない。この点を改善し、像面において細胞が明暗のコントラストとして見えるようにするには、対物レンズの後方焦点面になんらかの細工をすることにより、(回折光を変化させずに) 直進光のみの位相と振幅を操作すればよい。(2)

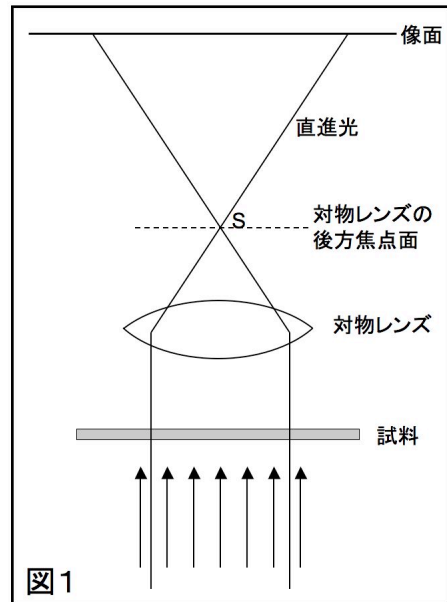


図1

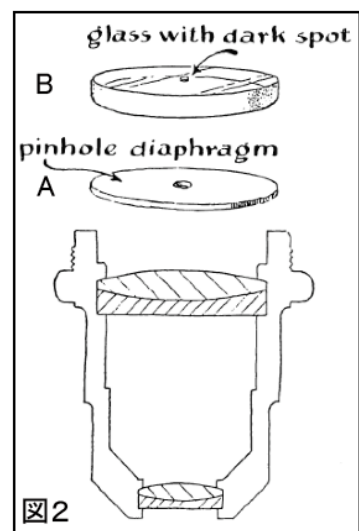


図2

問1) 下線部(1)の実験結果に基づき、試料による回折光がどのような光路を通過して像面に達するかを考察せよ。

問2) 下線部(2)について、対物レンズの後方焦点面において、回折光を変化させることなく直進光のみの位相を  $\pi/2$  遅らせ、さらに直進光の振幅を小さくした場合に、細胞は像面において周囲より暗く見えるか明るく見えるか。理由をつけて答えよ。